Tabellenkalkulation (Excel) als Instrument der mathematischen Begriffsbildung

Erich Neuwirth (Fakultät für Informatik, Universität Wien)

Tabellenkalkulation bietet einen anderen Zugang zur Darstellung mathematischer Zusammenhänge als die von den meisten anderen Mathematik-Programmen und Programmiersprachen unterstützte algebraische oder nahezu algebraische Schreibweise. Wir wollen zeigen, dass diese Darstellungsform das Verständnis mathematischer Begriffe unterstützen kann.

1. Ein einführendes Beispiel

Welche Tabelle wird durch folgende Beschreibung charakterisiert?

- In der Zelle ganz links oben steht 1.
- In der obersten Zeile steht (außer in der ersten Spalte) überall 0.
- In der Spalte ganz links steht überall die Zahl aus der Zelle darüber, also 1.
- Überall sonst steht die Summe der Zahl unmittelbar darüber. und der Zahl links darüber.

Stellt man mit Pfeilen dar, wie die Zahlen in dieser Tabelle errechnet werden, dann ergibt sich folgendes Bild:

1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0
1	5	10	10	5	1	0
1	6	15	20	15	6	1

Diese Pfeildarstellung kann man Excel ganz einfach mit dem Menüpunkt *Spur zum Vorgänger* (englisch *Trace Precedents*) erstellen.

Trace precendents Trade Dependents

Spur zum Vorgänger Spur zum Nachfolger

In klassisch algebraischer Notation kann man diese Tabelle als Funktion zweier ganzzahliger Argumente n (für den Zeilenindex) und k (für den Spaltenindex) so beschreiben:

$$B(n,k) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \text{ und } k=0 \\ 0 & \text{für } n=0 \text{ und } k>0 \\ B(n-1,k) & \text{für } n>0 \text{ und } k=0 \\ B(n-1,k-1)+B(n-1,k) & \text{für } n>0 \text{ und } k>0 \end{cases}$$

Diese drei Darstellungen sind äquivalent. Die klassisch algebraische ist aber für die meisten Nichtmathematiker deutlich schwerer zu verstehen als die textuelle und die grafische Darstellungsform.

Wesentlicher Bestandteil dieser Struktur ist die Rekursion; in der grafischen Darstellung wird klar, warum Rekursion, also eine Definition mit Bezug auf „sich selbst“, nicht widersprüchlich ist. Die Werte

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 47, 2014, S 56 - 61

in den Gleichungen werden immer aus der Zeile darüber genommen, also ist die Definition nicht zirkulär. Die Werte in der obersten Zeile sind bezugsfrei definiert, daher bricht die schrittweise Auflösung der Rekursion nach endlich vielen Schritten ab.

Die grafische Darstellung erlaubt noch eine weitere Einsicht.

Bei der Visualisierung der Gleichung stellen wir die Frage „*Woher* beziehen die Zellen ihren Input?“ Wir können aber auch fragen, *wohin* die Werte aus den einzelnen Zellen „weiterwandern“, welche anderen Werte sie also beeinflussen.

Das sieht dann so aus:

1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0
1	5	10	10	5	1	0
1	6	15	20	15	6	1

Der Wert aus jeder Zelle kommt also in der Zeile darunter genau zweimal vor, einmal unmittelbar darunter, und einmal rechts darunter.

Somit muss die Summe einer Zeile das Doppelte der Summe der Vorgängerzeile betragen.

Auch diese Darstellung mit den Pfeilen läßt sich in Excel direkt erzeugen, und zwar mit dem Menüpunkt *Spur zum Nachfolger* (englisch *Trace Dependents*).

Wir haben mit dieser grafisch gestützten Überlegung eben folgende Gleichung bewiesen:

$$\sum_{i=0}^{n} B(n,i) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} B(n-1,i)$$

Wenn man außerdem bedenkt, dass auch gilt:

$$\sum_{i=0}^{0} B(0,i) = 1$$

dass nämlich die Summe der ersten Zeile 1 ist, dann haben wir auch folgendes bewiesen:

$$\sum_{i=0}^{n} B(n,i) = 2^n$$

Natürlich hat der Leser längst erkannt, dass die Tabelle, die wir untersuchen, das Pascalsche Dreieck ist, und dass wir daher eine Gleichung über die Summe von Binomialkoeffizienten bewiesen haben.

Der Beweis dieser Gleichung in seiner klassischen Form ist für Nichtmathematiker sehr schwer zu verstehen und vermittelt auch kaum Einsichten in die Struktur der Binomialkoeffizienten. Der „grafische Beweis“ dagegen leitet die Summeneigenschaft direkt aus der rekursiven Struktur des Pascalschen Dreiecks ab.

2. Tabellenkalkulation und mathematische Notation

Die Studierenden in meinen Lehrveranstaltungen konfrontiere ich oft mit folgender Aufgabe:

$$3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 =$$
$$5 \cdot 5 - 6 \cdot 4 =$$
$$8 \cdot 8 - 9 \cdot 7 =$$

Es dauert immer einige Zeit, bis die Studierenden die Gesetzmäßigkeit erkennen.

Sie sind in der Regel nicht in der Lage, die Verbindung zur Gleichung $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$ als Spezialfall der Gleichung $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ herzustellen.

Als hilfreich erweist sich dabei eine leichte Änderung der Darstellung:

$$3 \cdot 3 = 4 \cdot 2 + 1$$
$$5 \cdot 5 = 6 \cdot 4 + 1$$
$$8 \cdot 8 = 9 \cdot 7 + 1$$

und das Erkennen des gemeinsamen Musters

$$\square \cdot \square = (\square + 1) \cdot (\square - 1) + 1$$

Die Verwendung eines grafischen Symbols als Platzhalter scheint den Studierenden dieses Muster leichter erkennbar zu machen als die Verwendung eines Variablenbuchstabens.

Das grafische Symbol hat die Rolle eines Platzhalters und stellt nicht - so wie Variablenbuchstaben - sofort eine Assoziation zu algebraischen Umformungen her.

Vom Begriff des Platzhalters ist es nur ein kurzer Weg zu Zellen in der Tabellenkalkulation. Eine Zelle ist ein Platz, der einen Wert enthält. Die Tabellenkalkulation zeigt das in reiner Form.

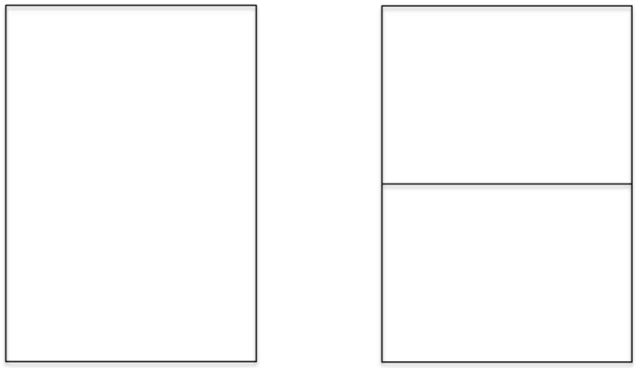
Ein weiterer wichtiger Aspekt der Tabellenkalkulation ist, dass die Rolle einer Zahl (oder eines Terms) in einer mathematischen Struktur nicht durch einen *Namen*, sondern durch die *Position* innerhalb des Systems ausgedrückt wird. Das einführende Beispiel mit den Binomialkoeffizienten hat das sehr deutlich dargestellt.

3. Weitere Beispiele

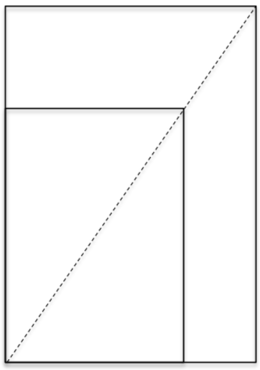
3.1. Papierformat A4

Wie lang und wie breit ist eigentlich ein Blatt Papier im Format A4? Dazu ist es hilfreich zu wissen, dass die A-Format-Serie durch eine geometrische Eigenschaft charakterisiert ist. Wenn man ein Blatt quer zur längeren Seite einmal in die Hälfte faltet, dann hat das neue (kleinere) Rechteck dasselbe Seitenverhältnis wie das alte Blatt.

Vor und nach dem Falten sieht das Blatt so aus:



Dass das „*halbe, gefaltete*“ Blatt dasselbe Seitenverhältnis hat wie das ungefaltete Blatt, kann man überprüfen, indem man das kleinere Blatt auf das größere Blatt legt. Der Eckpunkt des kleineren Blatts muss dann auf der Diagonale des größeren Blatts liegen, und zwar so:



Wenn wir also die Seitenlängen der Blätter aufschreiben und mit der langen und der kurzen Seite des ungefalteten Blattes beginnen, dann sieht das so aus:

Ungefaltetes Blatt	lange Seite	kurze Seite
Gefaltetes Blatt	kurze Seite	$\frac{\text{lange Seite}}{2}$

Das Seitenverhältnis soll bei beiden Rechtecken gleich sein, in der Tabelle

Ungefaltetes Blatt	lange Seite	kurze Seite	$\frac{\text{lange Seite}}{\text{kurze Seite}}$
Gefaltetes Blatt	kurze Seite	$\frac{\text{lange Seite}}{2}$	$\frac{\text{kurze Seite}}{\frac{\text{lange Seite}}{2}}$

sollen daher die beiden Ausdrücke in der Spalte ganz rechts gleich sein. Die Zielwertsuche in Excel kann diese Aufgabe ganz einfach numerisch lösen. Man muss dazu nur die „kurze Seite“ bzw. die entsprechende Zelle als veränderbar erklären und als Ziel vorgeben, dass die Differenz der beiden in der Spalte ganz rechts stehenden Werte 0 sein soll.

Der Wert, den man als Lösung erhält, ist das Seitenverhältnis. Man erhält die kürzere Seite des Rechtecks, indem man die längere Seite mit diesem Faktor multipliziert.

Diesen Wert kann man auch erhalten, wenn man die Verhältnisgleichung als quadratische Gleichung mit einer Unbekannten darstellt und löst. Die Lösung, die man dann erhält, ist $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

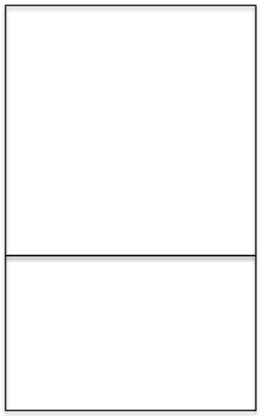
Mit der Tabellenkalkulation kann man die numerische Lösung unabhängig von der Kenntnis des Lösungsverfahrens der quadratischen Gleichung finden.

Um das Papierformat vollständig festzulegen, muss man noch wissen, dass das Format A0 genau ein Quadratmeter Papier ist. Man kann daher mit der Zielwertsuche für die lange Seite jenen Wert suchen, bei dem das Produkt

$$(\text{lange Seite}) \cdot (\text{kurze Seite}) = (\text{lange Seite}) \cdot (\text{lange Seite} \cdot \text{Seitenverhältnis})$$

1 wird.

Eine ähnliche geometrische Überlegung führt zum goldenen Schnitt. Man beginnt mit einem Rechteck, ergänzt es durch ein Quadrat zu einem größeren Rechteck. Man sucht das Seitenverhältnis für das Ausgangsrechteck so, dass das Ausgangsrechteck und das größere Rechteck dasselbe Seitenverhältnis haben.



Auch diese Aufgabe kann man ganz ähnlich wie die Aufgabe mit den Papierformaten mit Tabellenkalkulation behandeln.

3.2. Geometrische Folgen und Reihen

Geometrische Folgen sind besonders „tabellenkalkulationsgeeignet“.

Schreibt man die Glieder einer geometrischen Folge untereinander, dann erhält man eine Zahl, indem man die Zahl darüber mit immer derselben Zahl multipliziert.

Die geometrische Reihe ist die laufende Summe der geometrischen Folge; dieses Konzept lässt sich in der Tabellenkalkulation besonders verständlich veranschaulichen.

3.3. Dynamische Systeme

Der Kontostand eines Bankkontos kann als dynamisches System betrachtet werden. Das bedeutet, dass der Zustand der Variablen „Kontostand“ sich im Laufe der Zeit nach festen Regeln ändert. Wenn man also für jeden „Beobachtungszeitpunkt“ eine Zeile reserviert, dann kann man das System modellieren, indem man den neuen Konstostand aus dem alten (in der Zeile darüber) errechnet. Damit zeigt sich, dass auch die klassische Zinseszinsrechnung ihrer Natur nach ein rekursives Verfahren ist, das in der Tabellenkalkulation besonders klar veranschaulicht werden kann.

Weitere Beispiele finden sich in Neuwirth und Arganbright (2003).

Beispiele zur Anwendung von Tabellenkalkulation in der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man in Borovcnik und Neuwirth (2008).

4. Grundsätzliches

Einen in einem statischen Medium publizierten Artikel über Tabellenkalkulation - einem dynamischen Medium - zu schreiben ist ziemlich schwierig. Es ist ähnlich schwierig wie über Musik zu schreiben. Eine Partitur (also die Aufzeichnung von Musik in einem statischen Medium) ist nicht die Musik selbst. Man muss gelernt haben, die schriftliche Aufzeichnung in zu Hörendes umzusetzen. Dieser Vergleich zeigt auch eines der Grundprobleme der aktuellen Mathematik-Didaktik auf. Wenn wir beim Mathematik-Lernen den Computer als Lerninstrument (und nicht nur als größeren und leistungsfähigeren Taschenrechner) einsetzen wollen, dann ist das klassische Mitteilungsinstrument der Mathematik - Gedrucktes oder Geschriebenes - nicht in der Lage, mathematisches Handeln, das zu Verständnis führt, vollständig mit allen Facetten wiederzugeben.

Historisch gesehen ist es eine Stärke der Mathematik, dynamische (also in der Zeit ablaufende) Prozesse mit statischen Mitteln darzustellen.

Vor dem Computer gab es auch kaum Möglichkeiten für interaktive dynamische Darstellungsformen. Das ändert sich durch den Einsatz von Software.

Für den Einsatz der Tabellenkalkulation im Schulfach Mathematik spricht noch ein weiteres Argument: Tabellenkalkulation ist das weitestverbreitete Hilfsmittel zur Numerik im Wirtschaftsleben, aber auch in der Forschung in naturwissenschaftlichen Bereichen. Die Mathematik in der Schule sollte da andocken und zeigen, dass man mit diesem Werkzeug auch „echte Mathematik" betreiben kann.

Wenn in der Schule nur spezielle Mathematik-Software verwendet wird, dann sendet die Mathematik die Botschaft, dass Mathematik mit dem, was sich im Leben außerhalb der Schulmathematik ereignet, praktisch nichts gemeinsam hat.

Diese Gefahr besteht zum Beispiel, wenn man in der Schulmathematik nur Computeralgebrasysteme einsetzt. Nur ganz wenige Schüler werden nach der Schule derartige Werkzeuge verwenden. Der Einsatz von Tabellenkalkulation dagegen hilft den Lernenden, Fähigkeiten zu erwerben, die sie in ihrem späteren Leben mit hoher Wahrscheinlichkeit gut nützen können werden.

Literatur

Neuwirth E., Arganbright D. *Mathematical Modeling with Microsoft Excel* Duxbury, Pacific Grove (2003).

Borovcnik M., Neuwirth E.: *Rekursive Zugänge zu Wahrscheinlichkeitsproblemen und ihr Potential zur Modellbildung* Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 41, S. 1–21.